DUALITÄT IN DEN METHODEN ZUR ERWEITERUNG VON BESCHRÄNKT- WIE VON TOTAL-ADDITIVEN MASZEN. III

VON

J. RIDDER

(Communicated at the meeting of June 30, 1973)

Ich bemerkte neuerdings daß in Teil II., diese Proceed. A **74**, S. 399–410 der zweite Teil des Beweises von Satz A_1, l.c. S. 402–405 nicht stichhaltig ist.

Die Notationen und Annahmen sind wieder wie in Teil II.; hier folgt die (nicht geänderte) Formulierung des Satzes A_1 [10]) [für den ersten Teil des Beweises sei auf l.c. S. 401, 402 hingewiesen]; dann folgt ein neuer Hilfssatz (anstatt der drei ursprünglichen Hilfssätze), und schließlich der abgeänderte zweite Teil des Beweises von Satz A_1.

Satz A_1. Bei den Eigenschaften I, II, II^b, III, IV ist die in § 4 (von Teil II.) für die Somen von $\mathfrak{A}$ definierte Somenfunktion m^0 für $\mathfrak{A}$ ein reguläres äußeres Maß im Sinne der in der Einleitung zu Teil II. in Fußn. 5 zitierten Arbeit, §§ 1, 2, 3 (mit den das reguläre äußere Maß charakterisierenden Axiomen 1°–4°, 5°, 6°, 7°). Die in Teil II., § 4, zweite Def. eingeführte Somenklasse K der m^0-meßbaren Somen ist ein σ-Somenring $\supseteqq \mathfrak{A}^0$; das Maß $m \equiv m^0$ ist σ-additiv für die Somen von K, während für jedes $a \in \mathfrak{A}^0$ gilt:

$$m(a) \equiv m^0(a) = \mu(a);$$

$(K|m \equiv m^0)$ ist eine Erweiterung von $(\mathfrak{A}^0|\mu)$; sie ist vollständig in $\mathfrak{A}$.

Hilfssatz. Bei $a \in \mathfrak{A}$ mit $m^0(a)$ endlich ist $m^0(a) = \mu(\mathfrak{b}) = m^0(\mathfrak{b})$, wobei $\mathfrak{b} \supseteqq a$ und $\in \mathfrak{A}^0$; $\mathfrak{b}$ ist eine (m^0-) maßgleiche Hülle von a.

Beweis. Aus der Definition von $m^0(a)$ bei $a \in \mathfrak{A}$ folgt die Existenz von Somen $\mathfrak{b}_n$ mit $\mathfrak{b}_n \in \mathfrak{A}^0$, $a \subseteqq \mathfrak{b}_n$ und $m^0(a) \leqq \mu(\mathfrak{b}_n) < m^0(a) + 1/n$ $(n = 1, 2, \dots)$, wodurch die Monotonie von μ in $\mathfrak{A}^0 \equiv \mathfrak{A}^0[O; +_\sigma, \cdot_\sigma]$ liefert $m^0(a) = \mu(\prod_{n=1}^\infty \mathfrak{b}_n)$. Also ist $\mathfrak{b} \equiv \prod_{n=1}^\infty \mathfrak{b}_n$ ein Soma $\supseteqq a$, $\in \mathfrak{A}^0$ mit $m^0(a) = \mu(\mathfrak{b})$; daneben folgt aus $\mathfrak{b} \in \mathfrak{A}^0$, nach Teil II., § 4, die Gleichheit $\mu(\mathfrak{b}) = m^0(\mathfrak{b})$.

---

[10]) Das duale Verhältnis zwischen Satz A_1 (§ 5) und Satz A_1^{bis} (§ 5^{bis}) bleibt erhalten.

Korrektur. Im Beweise von Satz A_1^{bis} ändere man, l.c. S. 408, Zeile 6 v.o.: "sind die c_i'' Nullsomen" in: "ist $\prod_{i=1}^\infty c_i''$ Nullsoma".

Beweis des Satzes A_1. (zweiter Teil). Axiom 6°. Die Annahmen sind: a_j $(j=1, 2, \ldots) \in \mathfrak{A}$, $a_1 \subseteqq \ldots \subseteqq a_j \subseteqq \ldots$, $\bar{a} \equiv \sum_{j=1}^{\infty} a_j$ und $m^0(\bar{a})$ endlich.

Nach dem Hilfssatz gibt es für jedes j ein $\mathfrak{b}_j \supseteqq a_j$, $\in \mathfrak{A}^0$ mit $m^0(a_j) = \mu(\mathfrak{b}_j)$. Mit $\mathfrak{b}_j' = \mathfrak{b}_j \cdot \mathfrak{b}_{j+1} \ldots$ ist dann $\mathfrak{b}_j' \in \mathfrak{A}^0$, $a_j \subseteqq \mathfrak{b}_j' \subseteqq \mathfrak{b}_j$ und $m^0(a_j) = \mu(\mathfrak{b}_j') = \mu(\mathfrak{b}_j)$, wodurch $\mathfrak{b}_1' \subseteqq \mathfrak{b}_2' \subseteqq \ldots$ eine Folge μ-meßbarer Somen von $\mathfrak{A}^0$ ist, für deren Summe s gilt:

$$s \in \mathfrak{A}^0,\ s \supseteqq \bar{a} = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \text{ und } m^0(\bar{a}) \leqq \mu(s) = \mu\Big(\sum_{j=1}^{\infty} \mathfrak{b}_j'\Big) = (\text{Eig. III.})$$

$$\lim_{j\to\infty} \mu(\mathfrak{b}_j') = \lim_{j\to\infty} m^0(a_j).$$

Es ist sofort deutlich daß auch:

$$\lim_{j\to\infty} m^0(a_j) \leqq m^0(\bar{a}),$$

wonach die in Axiom 6° geforderte Gleichheitsrelation folgt.

Axiom 7°. Aus $a_j (j=1, 2, \ldots) \in K$, $a_{i_1} \cdot a_{i_2} = O (i_1 \neq i_2)$ und $m^0(\sum_{i=1}^{\infty} a_i) = \infty$ folgt $\sum_{j=1}^{\infty} m^0(a_j) = \infty$.

Der Beweis verläuft indirekt. Bei $\sum_{j=1}^{\infty} m^0(a_j)$ endlich folgte, nach Definition, die Existenz von Somen $b_j \supseteqq a_j$ und $\in \mathfrak{A}^0$ $(j=1, 2, \ldots)$, und mit $\sum_{j=1}^{\infty} \mu(b_j)$ endlich. Nach Eigenschaft IV. (in der Einleitung von Teil II.) müßte dann auch $\mu(\sum_{j=1}^{\infty} b_j)$ endlich sein, wodurch umsomehr $m^0(\sum_{j=1}^{\infty} a_j)$ endlich wäre, entgegen der Voraussetzung.

Die Behauptungen des Satzes sind nun erfüllt; insbes. folgt auch aus den Axiomen 1°–7° für m^0 daß die Summe von abzählbar vielen m^0-meßbaren Somen m^0-meßbar ist; das zugehörige Maß $m \equiv m^0$ ist total- oder σ-additiv; der Ring K ist ein σ-Somenring. [11])

Nachtrag

In Fußn. 10 wird auf das duale Verhältnis der Sätze A_1 und A_1^{bis} hingewiesen. Dieses duale Verhältnis besteht *nicht* zwischen dem hier gegebenen Beweis von Satz A_1 und dem Beweise von Satz A_1^{bis} in Teil II., dagegen wohl zwischen dem Beweis von Satz A_1 in diesem Teil III. und dem im folgenden Nachtrag für Satz A_1^{bis} gegebenen Beweis.

Satz A_1^{bis}. Bei den Eigenschaften I., $\overline{\text{II}}$., $\overline{\text{III}}$., $\overline{\text{IV}}$. ist die in § 4^{bis} für die Somen von $\mathfrak{A}$ definierte Somenfunktion m_0 ein reguläres inneres Maß, hat somit die nachfolgenden Eigenschaften: 1°–4°, $\bar{5}$°, $\bar{6}$°, $\bar{7}$°; die hier in § 4^{bis}, zweite Def. eingeführte Somenklasse K der m_0-meßbaren Somen ist ein σ-Somenring $\supseteqq \mathfrak{A}^0$; das Maß $m \equiv m_0$ ist σ-additiv für die Somen von K, während für jedes $a \in \mathfrak{A}^0$ gilt

$$m(a) \equiv m_0(a) = \mu(a);$$

$(K|m \equiv m_0)$ ist eine Erweiterung von $(\mathfrak{A}^0|\mu)$; sie ist vollständig in $\mathfrak{A}$ (im Sinne von loc. cit. 5), Fußn. 37 und von loc. cit. 7), Fußn. 3 (Bemerkung)).

---

[11]) Siehe loc. cit. 5), S. 365 (Satz).

Beweis (erster Teil). Die Ableitung der Axiome 1°–4°, $\bar{5}$° als beweisbare Sätze für m_0 und $\mathfrak{A}$ verläuft unter Bezugnahme auf § 4^bis wie in § 2^bis von Teil α (Teil I.).

Axiom 1° (es gibt ein Soma $w \in \mathfrak{A}$ mit $m_0(w)$ endlich und $\neq 0$).

Axiom 2° (das Nullsoma O ist m_0-meßbar; dabei ist $a \in \mathfrak{A}$ m_0-meßbar falls *bei jedem* $w \in \mathfrak{A}$ *mit* $m_0(w)$ *endlich* gilt: $m_0(w) = m_0(w \cdot a) + m_0(w - w \cdot a)$).

Axiom 3° (aus $a, b \in \mathfrak{A}$, $a \subset b$ folgt $m_0(a) \leqq m_0(b)$).

Aus den Axiomen 1°, 2°, 3° folgt, nach loc. cit. 5), § 1, daß die Klasse K von m_0-meßbaren Somen in $\mathfrak{A}$ ein Somenring ist, wobei für $a, b \in K$ und $m_0(a+b)$ endlich gilt: $m_0(a+b) = m_0(a) + m_0(b) - m_0(a \cdot b)$. Zusammen mit Folgerung 7° liefert dies die beschränkte Additivität von m_0 für die Somen von K.

Axiom 4° (zu $a \in \mathfrak{A}$ mit $m_0(a)$ endlich gibt es ein $b \in K$, $\supseteqq a$ mit $m_0(b)$ endlich).

Axiom $\bar{5}$° (aus $a \in \mathfrak{A}$ mit $m_0(a)$ endlich folgt: $m_0(a) =$ obere Grenze aller $m_0(\bar{b})$ mit $\bar{b} \subseteqq a, \in K$).

Hilfssatz. Bei $a \in \mathfrak{A}$ mit $m_0(a)$ endlich ist $m_0(a) = \mu(\bar{c}) = m_0(\bar{c})$, wobei $\bar{c} \subseteqq a$ und $\in \mathfrak{A}^0$; $\bar{c}$ ist ein (m_0-) maßgleicher Kern von a.

Beweis. Aus der Definition von $m_0(a)$ bei $a \in \mathfrak{A}$ folgt die Existenz von Somen $\bar{c}_n$ mit $\bar{c}_n \in \mathfrak{A}^0$, $\subseteqq a$ und $m_0(a) - 1/n < \mu(\bar{c}_n) \leqq m_0(a)$ $(n = 1, 2, \ldots)$, wodurch die Monotonie von μ in $\mathfrak{A}^0 \equiv \mathfrak{A}^0[O; +_\sigma, \cdot_\sigma]$ liefert $m_0(a) = \mu(\sum_{n=1}^{\infty} \bar{c}_n)$. Also ist $\bar{c} \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \bar{c}_n$ ein Soma $\subseteqq a, \in \mathfrak{A}^0$ mit $m_0(a) = \mu(\bar{c})$; daneben folgt aus $\bar{c} \in \mathfrak{A}^0$, nach Teil II., § 4^bis, die Gleichheit $\mu(\bar{c}) = m_0(\bar{c})$.

Beweis des Satzes A_1^{bis}. (zweiter Teil). Axiom $\bar{6}$°. Die Annahmen sind: $b_j (j = 1, 2, \ldots) \in \mathfrak{A}$, $b_1 \supseteqq \ldots \supseteqq b_j \supseteqq \ldots$, $\bar{b} \equiv \prod_{j=1}^{\infty} b_j$ und $m_0(b_1)$ oder $\lim_{j \to \infty} m_0(b_j)$ endlich.

Es genügt den Fall: $m_0(b_1)$ endlich zu betrachten. Nach dem Hilfssatz gibt es für jedes j ein $\bar{c}_j \subseteqq b_j, \in \mathfrak{A}^0$ mit $m_0(b_j) = \mu(\bar{c}_j)$. Mit $\bar{c}_{j+k}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ $\subseteqq b_{j+k} \subseteqq b_j$ folgt $\bar{c}_j \subseteqq \bar{c}_j{}' \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \bar{c}_{j+k} \subseteqq b_j$, wobei $\bar{c}_j{}' \in \mathfrak{A}^0$, $\bar{c}_1{}' \supseteqq \ldots \supseteqq \bar{c}_j{}' \supseteqq \ldots$; auch ist $\bar{b} \supseteqq \prod_{j=1}^{\infty} \bar{c}_j{}' \equiv p$, mit $p \in \mathfrak{A}^0$. Nun ist

$$m_0(\bar{b}) \geqq \mu(p) = \mu\Big(\prod_{j=1}^{\infty} \bar{c}_j{}'\Big) = (\text{Eig. } \overline{\text{III}}.) \lim_{j \to \infty} \mu(\bar{c}_j{}') = \lim_{j \to \infty} m_0(b_j).$$

Es ist sofort deutlich daß auch

$$\lim_{j \to \infty} m_0(b_j) \geqq m_0(\bar{b}),$$

wonach die in Axiom $\bar{6}$° geforderte Gleichheitsrelation folgt.

Axiom $\bar{7}$°. Aus $b_j (j = 1, 2, \ldots) \in K$ [K (für m_0) wie in § 1 von Teil I.], $b_{j_1} \cdot b_{j_2} = O (j_1 \neq j_2)$ und $m_0(\sum_{j=1}^{\infty} b_j) = \infty$ folgt $\sum_{j=1}^{\infty} m_0(b_j) = \infty$.

Im entgegengesetzten Fall, also bei $\sum_{j=1}^{\infty} m_0(b_j)$ endlich folgt, mit der Definition von m_0, auch $\sum_{j=1}^{\infty}$ {obere Grenze aller $\mu(\bar{b}_j)$ mit $\bar{b}_j \subseteqq b_j, \in \mathfrak{A}^0$} endlich, wodurch Eigenschaft $\overline{\text{IV}}$ (siehe Teil II.) zu der Existenz eines

Somas $\bar{b} \supseteqq \sum_{j=1}^{\infty} b_j, \in \mathfrak{A}^0$ mit $\mu(\bar{b})$ endlich führt, also umsomehr zu der Endlichkeit von $m_0(\sum_{j=1}^{\infty} b_j)$, im Gegensatz zu der Voraussetzung in Axiom $\bar{7}°$.

Die Behauptungen von Satz A_1^{bis} sind nun erfüllt; insbes. folgt aus den Axiomen 1°–4°, $\bar{5}°$, $\bar{6}°$, $\bar{7}°$ für m_0 daß der Ring K von m_0-meßbaren Somen ein σ-Somenring ist; Komplementbildung unter Anwendung der Axiome $\bar{6}°$ und $\bar{7}°$ liefert die σ-Additivität für die Maße der m_0-meßbaren Somen. [12])

BIBLIOGRAFIE

1. Kisyński, J., On the generation of tight measures. Studia math. **30**, 141–151 (1968).
2. Topsøe, F., Compactness in spaces of measures. Studia math. **36**, 195–212 (1970).

---

[12]) Siehe loc. cit. 5), S. 366 (Satz).